$$\nabla_{<i_{k_1}>} R^i_{jpq}, \quad \nabla_{<i_{l_1}>} (\partial_\alpha L^i_{jk}), \nabla_{<i_{n_1}>} R^\alpha_{pq}, \nabla_{<i_{m_1}>} N^\alpha_{\beta k},$$

где $k_1 = \max(k-1, l-2, n-2, m-2)$, $l_1 = \max(k-2, l, n-3, m-3)$,

$n_1 = \max(k-1, l-2, n, m-2)$; $m_1 = \max(k-3, l-4, n-4, m)$.

Справедливость теоремы следует из теоремы о замене I и теоремы 3.

Т е о р е м а п р и в е д е н и я 2. Каждый дифференциальный (скалярный, тензорный) инвариант векторного расслоения с триплетной связностью, зависящий от следующих аргументов: $\overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_1}>} \Gamma^j_{pq}$, $\overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_2}>} (\partial_\alpha \Gamma^j_{pq})$, $\overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_3}>} R^\alpha_{pq}$, $\overset{\Gamma}{\partial}_{<i_{k_4}>} N^\alpha_{\beta i}$,

является алгебраическим инвариантом от аргументов

$$\nabla_{<i_k>} R^j_{kpq}, \nabla_{<i_l>} (\partial_\alpha L^j_{pq}), \nabla_{<i_n>} R^\alpha_{pq}, \nabla_{<i_m>} N^\alpha_{\beta i},$$

где $k = \max(k_1 - 1, k_2, k_3 - 2, k_4 - 2)$, $l = \max(k_1 - 2, k_2, k_3 - 2, k_4 - 3)$,

$n = \max(k_1 - 1, k_2 - 2, k_3, k_4 - 2)$, $m = \max(k_1 - 3, k_2 - 4, k_3 - 4, k_4)$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы о замене 2 и теоремы 3.

Библиографический список

1. В е б л е н О. Инварианты дифференциальных квадратных форм. М., 1948.

2. Varga O. Az elzo Magyar Matematikai Kongresszus Kozlemenyei, 1950. Akad. Kiado. Budapest, 1952. P.147-162.

3. A. Rapcsak. Theorie der Bahren in Linienelementmanifaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihren affinen Theorie // Actu scien Math. 1955. V.26. N3-4. P. 251-265.

4. Л а п т е в Б.Л. Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов // Уч. зап. / Казанский ун-т. Казань, 1958. Т.118. Кн.4. С.75-147.

5. У р б о н а с А.П. О дифференциальных инвариантах пространства опорных элементов // Тр. семин. кафедры геометрии/ Казанский ун-т. Казань, 1968. Вып3. С.115-133.

6. Ш и н к у н а с Ю.И. О дифференциальных инвариантах пространства опорных линеаров // Лит. мат. сб. 1970. Т.Х. № 3. С.611-637.

7. Д ж и н ч а р а д з е Т.Р. Дифференциальные инварианты касательного расслоения / Тбилисский мат. ин-т им. А.Размадзе. Тбилиси, 1988. 21 с. Деп. в БИВУ ГКНТ ГССР 12.08.88, № 449.

8. Т о д у а Г.Ш. Векторные расслоения со связностью // Лит. мат. о-во. Тез. докл. / Вильнюс, 1988. С.190-191.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОМПЛЕКСОВ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы [1], порожденные квадрикой Q и точкой P^* причем многообразие квадрик Q - трехмерное, а точек P^* - одномерное. Изучен класс комплексов $(QP^*)_{3,1}$, для которых точка P^* инцидентна квадрике Q, центры квадрик Q образуют поверхность (P), касательная плоскость к которой и касательная к линии (P^*) параллельны в соответствующих точках.

Между образующими элементами комплекса $(QP^*)_{3,1}$ устанавливается соответствие, при котором каждой квадрике Q соответствует единственная точка P^*, полным прообразом которой является конгруэнция квадрик Q_{P^*}. Устанавливается также соответствие между множествами точек (P^*) и (P), при котором каждой точке P^* соответствует на поверхности (P) линия Γ_{P^*}.

Отнесем комплекс $(QP^*)_{3,1}$ к реперу $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, в котором точка A совмещена с центром P квадрики Q, вектор $\vec{e}_1$ параллелен касательной к линии (P^*) в соответствующей точке P^*, вектор $\vec{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_{P^*} в точке P, конец вектора $\vec{e}_3$ (точка A_3) совмещен с точкой P^*, концы векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (точки A_1, A_2) инцидентны квадрике Q.

Квадрика Q в репере R задается уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 2\alpha x^1 x^2 - 2\gamma x^2 x^3 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что многообразие квадрик Q трехмерное, а точек P^* - одномерное, выберем $\omega^1_3, \omega^2_3, \omega^2_2$ в качестве базисных форм комплекса, обозначив их соответственно $\theta^1, \theta^2, \theta^3$.

Система уравнений Пфаффа комплекса $(QP^*)_{3,1}$ имеет вид:

$$
\begin{cases}
\omega^3 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_3^2 = -\theta^2, \ -\omega_3^1 = \Gamma_3^1 \theta^1, \ \omega_1^{i+1} = \Gamma_1^{i+1}\theta^1, \\
\omega_2^3 = \Gamma_2^3 \theta^2, \ \omega_1^1 = \Gamma_{1a}^1 \theta^a, \quad \omega_2^1 = \Gamma_{2i}^1 \theta^i, \quad d\alpha = \alpha_a \theta^a, \\
d\gamma = \gamma_a \theta^a \quad (i = 1,2; \ a = 1,2,3).
\end{cases} \tag{2}
$$

Вырожденные комплексы $(QP^*)_{3,1}$ существуют и определяются с произволом трех функций трех аргументов.

Получены следующие результаты: 1) торсы прямолинейных конгруэнций (AA_a) высекают на поверхности (P) сеть линий Γ_{p*}, Γ, где Γ – линии, огибаемые прямыми AA_1; 2) линии Γ_{p*} являются на поверхности (P) линиями тени; 3) характеристические точки координатных плоскостей инцидентны прямой AA_3; 4) линии Γ_{p*}, Γ образуют на поверхностях $(P), (F_{32})$ сопряженную сеть, где $\bar{F}_{32} = \bar{A} - \frac{1}{\Gamma_3^1}\bar{e}_3$ – фокальная точка луча прямолинейной конгруэнции (AA_3), касательные к линиям Γ_{p*}, Γ в точке F_{32} проходят через фокусы луча прямолинейной конгруэнции (AA_2); 5) соприкасающаяся плоскость линии Γ_{p*} в точке P является касательной плоскостью к фокальной поверхности прямолинейной конгруэнции (AA_2), образованной точкой $\bar{F}_{22} = \bar{A} - \frac{1}{\Gamma_{21}^1}\bar{e}_2$; 6) существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AA_3) к семейству касательных плоскостей к поверхности (P); 7) если соприкасающаяся плоскость линии Γ_{p*} в точке P проходит через соответствующую точку P^*, то поверхность (P) расслаивается на семейство плоских линий Γ_{p*}, фокальные поверхности (F_{32}) и (F_{22}) являются в этом случае торсами; 8) линии Γ_{p*} являются прямыми тогда и только тогда, когда они – асимптотические линии на поверхности (P).

В силу поставленной задачи точка P^* является фокальной точкой комплекса квадрик Q и конгруэнции квадрик Q_{p*}. Если многообразие точек A_1 двумерное $(\Gamma_{13}^1 = 0)$, то характеристическое многообразие комплекса квадрик Q [2] инцидентно двум плоскостям $x^2 = 0$, $x^1(\alpha - \alpha_3) + x^3(\gamma - \gamma_3) - x^2 = 0$ и определяется системой уравнений:

$$
\begin{cases}
Q_1 \equiv (x^1)^2(\alpha\Gamma_1^2 - \Gamma_{11}^1) + x^1x^2(\Gamma_{21}^1 - \Gamma_1^2 - \alpha_1 + \alpha\Gamma_{11}^1 + \gamma\Gamma_1^3) + x^1x^3(\gamma\Gamma_1^2 - \Gamma_3^1 - \Gamma_1^3) + \\
\quad + x^2x^3(\alpha\Gamma_3^1 - \gamma_1) - x^1 + \alpha x^2 + \alpha\Gamma_{21}^1(x^2)^2 = 0, \\
Q_2 \equiv -\Gamma_{12}^1(x^1)^2 + x^1x^2(\alpha\Gamma_{12}^1 - \alpha_2 - \Gamma_{22}^1) - \alpha x^1x^3 + x^2x^3(1 - \Gamma_2^3 - \gamma_2) + \\
\quad + \alpha x^1 - x^2 + \gamma x^3 + (x^2)^2(\alpha\Gamma_{22}^1 + \gamma\Gamma_2^3) - \gamma(x^3)^2 = 0, \\
Q_3 \equiv x^2(x^1(\alpha - \alpha_3) + x^3(\gamma - \gamma_3) - x^2) = 0.
\end{cases} \tag{3}
$$

Q_1, Q_2, Q_3 – коэффициенты в разложении $dQ = Q_1\theta^1 + Q_2\theta^2 + Q_3\theta^3$.

Каждой точке P^* линии (P^*) соответствуют конгруэнции коник (C_a), полученных при пересечении квадрики Q координатными плоскостями $x^a = 0$:

C_1: $\quad (x^2)^2 + (x^3)^2 - 2\gamma x^2x^3 - 1 = 0, \quad x^1 = 0;$

C_2: $\quad (x^1)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad x^2 = 0;$

C_3: $\quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha x^1x^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0.$

Конгруэнции (C_a) определяются системой уравнений (2) и условием $\theta^1 = 0$.

Доказано, что точки A_3 и $\bar{A}_3' = \bar{A} - \bar{e}_3$ являются сдвоенными фокальными точками коники C_1, точки пересечения прямой $x^1 = 0$, $x^2 - x^3(\gamma - \gamma_3) = 0$ с коникой C_1 также являются фокальными точками.

Для коники C_2 точки A_3, A_3' являются трехкратными фокальными точками.

Фокальными точками коники C_3 являются точки A_1 и $\bar{A}_1' = \bar{A} - \bar{e}_1$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1973. Вып.3. С.41-49.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-133.

УДК 514.75

О ЦЕНТРАЛЬНО-ПРОЕКТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E_n рассматриваются две m-поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar{M}$. Исследуется случай, когда f – центральное проектирование.

1. Пусть $M, \bar{M}$ – гладкие m-поверхности, $\mathfrak{F}(M)$ есть R-алгебра дифференцируемых на M функций, $T_s^r(M)$ обозначает $\mathfrak{F}$-модуль дифференцируемых тензорных полей на M типа (r,s), $\tilde{\nabla}$ –